目录

第一部分 中小学基础专业知识 1
第一模块 数与代数 1
第一章 数 1
第二章 复数 1
第三章 代数式 2
第四章 集合与简易逻辑 3
第五章 方程与不等式 5
第六章 函数 7
第七章 数列 16
第八章 奥数 18
第二模块 图形与几何 19
第一章 平面几何 19
第二章 立体几何 26
第三章 解析几何 29
第三模块 统计与概率 35
第一章 统计 35
第二章 排列组合 37
第三章 概率 38
第二部分 大学数学基础知识 40
第一模块 高等数学 40
第一章 极限与连续 40
第二章 导数及微分 42
第三章 积分 44
第四章 空间解析几何 45
第二模块 线性代数 49
第一章 行列式 49
第二章 矩阵 51
第三章 线性方程组 52
第三部分 数学课程与教学论 53
第一模块 数学史 53
第二模块 课标与教学论 56
第一章 课程标准 56
第二章 数学教学论 71
第三章 案例分析 72
第四章 教学设计 72

第一部分 中小学基础专业知识

第一模块 数与代数

第一章 数

【考点 1】实数的分类

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数（}0,1,2,3,\cdots\text{）}\\ \text{负整数（}-1,-2,-3,\cdots\text{）}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数（}\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\cdots\text{）}\\ \text{负分数（}-\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{3},\cdots\text{）}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

【考点 2】整除

1.若一个整数的末位是 0，2，4，6 或 8，则这个数能被 2 整除。

2.若一个整数的各位数字之和能被 3（9）整除，则这个整数能被 3（9）整除。

3.若一个整数的末尾两（三）位数能被 4（8）整除，则这个数能被 4（8）整除。

4.若一个整数的末位是 0 或 5，则这个数能被 5 整除。

5.若一个整数能被 2 和 3 同时整除，则这个数能被 6 整除。

6.若将一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除。如果差太大或心算不易看出是否是 7 的倍数，就需要继续上述截尾、倍大、相减、验差的过程，直到能清楚判断为止。

7.一个数从右边向左边数，将奇位上的数字与偶位上的数字分别加起来，再求它们的差，如果这个差是 11 的倍数（包括 0），那么，原来这个数就一定能被 11 整除。

8.一个数末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数的差（以大减小），能被 7，11，13 整除，则这个数能被 7，11，13 整除。

第二章 复数

【考点 3】复数的重要概念

1. i 称为虚数单位，规定 $\mathrm{i}^2=-1$，形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数称为复数，其中 a，$b\in\boldsymbol{R}$。a，b 分别叫做复数的实部与虚部。

$$
\text{复数}a+b\mathrm{i}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数 — 循环小数}\\ \text{无理数 — 无限不循环小数}\end{cases}\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}
$$

2.复数相等：设复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}\left(a_1，b_1，a_2，b_2\in\boldsymbol{R}\right)$，那么 $z_1=z_2$ 的充要条件是：

$a_1 = a_2$且$b_1 = b_2$。特别地，$z = a + b\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$。

3.共轭复数：实部相同，虚部相反的两个复数互为共轭复数，如果$z = a + b\mathrm{i}(a，b \in \boldsymbol{R})$的共轭复数为$a - b\mathrm{i}(a，b \in \boldsymbol{R})$，记为$\bar{z} = a - b\mathrm{i}(a，b \in \boldsymbol{R})$，那么$z$与$\bar{z}$对应复平面上的点关于实轴对称，且（1）$z + \bar{z} = 2a，z - \bar{z} = 2b\mathrm{i}，z\bar{z} = a^2 + b^2$；（2）$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \boldsymbol{R}$。

【考点 4】复数的运算

1.加法：$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$。

2.减法：$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$。

3.乘法：$(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (bc + ad)\mathrm{i}$。

4.除法：$\dfrac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \dfrac{(a + b\mathrm{i}) \cdot (c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i}) \cdot (c - d\mathrm{i})} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$。

5.幂运算：$\mathrm{i}^{4n} = 1，\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}，\mathrm{i}^{4n+2} = -1，\mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$，$n \in \mathbf{N}$。

第三章 代数式

【考点 5】整式的运算法则

1.整式的乘法

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（$m，n$都是正整数）　　$(a^m)^n = a^{mn}$（$m，n$都是正整数）

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$　　$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$　　$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$　　$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2.整式的除法

$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$m，n$都是正整数，$a \neq 0$）。

【考点 6】因式分解

1.因式分解的常用方法

（1）提公因式法：$ab + ac = a(b + c)$。

（2）十字相乘法：$kx^2 + mx + n = (ax + b) \cdot (cx + d)$，其中$k = ac$，$n = bd$，$m = ad + bc$。

（3）公式法：$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$，$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$，$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$。

（4）求根公式法：令多项式$f(x) = 0$，求出其根为$x_1，x_2，x_3，\cdots，x_n$，则多项式可因式分解为$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)$。

2.因式分解的一般步骤

（1）如果多项式的各项有公因式，那么先提取公因式；

（2）在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，观察多项式的项数：①两项式可以尝试运用公式法分解因式；②三项式可以尝试运用公式法、十字相乘法分解因式；

（3）分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止。

【考点 7】分式

1.分式的概念

一般地，用 A、B 表示两个整式，$A\div B$ 就可以表示成 $\dfrac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中含有字母，式子 $\dfrac{A}{B}$ 就叫做分式。其中 A 为分式的分子，B 为分式的分母。

2.分式的运算法则

（1）分式的加减法：$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{b}=\dfrac{a\pm c}{b}$，$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$；

（2）分式的乘法：$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$；

（3）分式的乘方：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$n$ 为整数）；

（4）分式的除法：$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$。

【考点 8】二次根式

1.二次根式

把形如 $\sqrt{a}\left(a\ge 0\right)$ 的式子叫做二次根式，二次根式必须满足：

（1）含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；（2）被开方数 a 必须是非负数。

2.最简二次根式

若二次根式满足：

（1）被开方数的因数是整数，因式是整式；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式。

3.同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式。

4.二次根式的性质

（1）$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\left(a\ge 0\right)$

（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\left(a\ge 0\right)\\-a\left(a<0\right)\end{cases}$

（3）$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\left(a\ge 0，b\ge 0\right)$

（4）$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(a\ge 0，b>0\right)$

第四章 集合与简易逻辑

【考点 9】集合与集合的关系

1.相等：若集合 A 、 B 中的元素完全相同，则集合 A 与集合 B 相等，即 $A=B$ 。

2.子集：若集合 A 中的元素都是 B 中的元素，则集合 A 是集合 B 的子集，即 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$ ）。读作：“ A 含于 B ”（或“ B 包含 A ”）。

3.真子集：若集合 A 中的元素都是 B 中的元素，且 $A\neq B$ ，则集合 A 是集合 B 的真子集，即 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$ ）。

4.空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。

【考点 10】集合的运算

1.并集

由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$（或 $B\cup A$ ），读作“ A 并 B ”（或“ B 并 A ”），即 $A\cup B=\left\{x\mid x\in A，或x\in B\right\}$。

2.交集

由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（或 $B\cap A$ ），读作“ A 交 B ”（或“ B 交 A ”），即 $A\cap B=\left\{x\mid x\in A，且x\in B\right\}$。

3.补集

对于一个集合 A ，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$ ，即 $\complement_U A=\left\{x\mid x\in U，且x\notin A\right\}$。

【考点 11】四种命题

1.设命题（1）“若 p ，则 q ”是原命题，那么，

命题（2）“若 q ，则 p ”是原命题的逆命题；

命题（3）“若 $\neg p$ ，则 $\neg q$ ”是原命题的否命题；

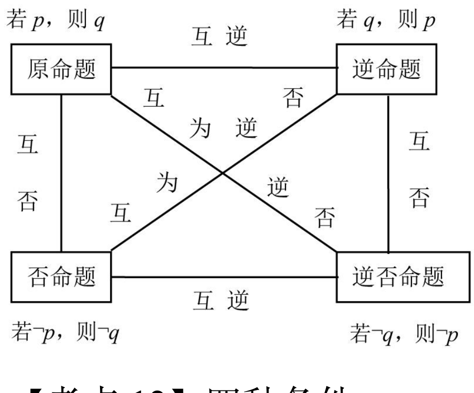
命题（4）“若 $\neg q$ ，则 $\neg p$ ”是原命题的逆否命题。

2.四种命题之间的真假性

（1）原命题为真，它的逆命题不一定为真。

（2）原命题为真，它的否命题不一定为真。

（3）原命题为真，它的逆否命题一定为真。



【考点 12】四种条件

1.如果已知 $P\Rightarrow Q$，那么就说，P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件；